Bulletin de l'académie
polonaise des sciences
Cl. III — Vol. IV, No. 12, 1956

MATHÉMATIQUE

Sur la division des corps matériels en parties [1]

par

H. STEINHAUS

Présenté le 19 Octobre 1956

Un corps Q est, par définition, une répartition de matière dans l'espace, donnée par une fonction $f(P)$; on appelle cette fonction la *densité* du corps en question ; elle est définie pour tous les points P de l'espace ; elle est non-négative et mesurable. On suppose que *l'ensemble caractéristique* du corps $E = \underset{P}{E}\,\{f(P) > 0\}$ est borné et de mesure positive ; on suppose aussi que l'intégrale de $f(P)$ sur E est finie : c'est la *masse* du corps Q. On considère comme identiques deux corps dont les densités sont égales à un ensemble de mesure nulle près.

En décomposant l'ensemble caractéristique d'un corps Q en n sous-ensembles E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de mesures positives, on obtient une division du corps en question en n *corps partiels* ; leurs ensembles caractéristiques respectifs sont les E_i et leurs densités sont définies par les valeurs que prend la densité du corps Q dans ces *ensembles partiels*. En désignant les corps partiels par Q_i, on écrira $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$. Quand on donne d'abord n corps Q_i, dont les ensembles caractéristiques sont disjoints deux à deux à la mesure nulle près, il existe évidemment un corps Q ayant ces Q_i comme autant de parties ; on écrira $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = Q$. Ces remarques suffisent pour expliquer la division et la composition des corps.

Le problème de cette Note est la division d'un corps en n parties K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et le choix de n points A_i de manière à rendre aussi petite que possible la somme

$$S(K, A) = \sum_{i=1}^{n} I(K_i, A_i) \quad (K \equiv \{K_i\}, \quad A \equiv \{A_i\}), \tag{1}$$

où $I(Q, P)$ désigne, en général, le *moment d'inertie* d'un corps quelconque Q par rapport à un point quelconque P. Pour traiter ce problème élémentaire nous aurons recours aux lemmes suivants :

1. Cet article de Hugo Steinhaus est le premier formulant de manière explicite, en dimension finie, le problème de partitionnement par les k-moyennes (k-*means*), dites aussi "nuées dynamiques". Son algorithme classique est le même que celui de la quantification optimale de Lloyd-Max. Étant difficilement accessible sous format numérique, le voici transduit par Maciej Denkowski, transmis par Jérôme Bolte, transcrit par Laurent Duval, en juillet/août 2015. Un effort a été fourni pour conserver une proximité avec la pagination originale.

a) Q étant donné, $I(Q,P)$ atteint un minimum parfait quand P devient identique avec le centroïde de Q.

b) Si (K,A) est la solution du problème, tout A_i est le centroïde de K_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

c) Soient K_1 et K_2 deux corps partiels de Q, obtenus en coupant l'ensemble caractéristique E de Q en deux par un plan ; soient A_1 et A_2 les centroïdes respectifs de K_1 et K_2 ; on aura

$$S(K,A) < I(Q,P)$$

quel que soit le point P.

d) Si (K,A) est la solution du problème, on a $A_i \neq A_j$ pour $i \neq j$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.

e) Soit $\overline{D}$ le plus petit domaine convexe et fermé contenant l'ensemble caractéristique E de Q, et soit P' le point de $\overline{D}$ le plus proche de P ; on aura $I(Q,P) \geqslant I(Q,P')$.

Le lemme a) résoud le problème pour $n = 1$; il est connu universellement ; nous y parlons de minimum *parfait*, car il n'y a pas d'autres points donnant des valeurs extrêmes à I. Le lemme b) résulte de a). Le lemme c) résulte de ce que $I(Q,P) = I(K_1,P) + I(K_2,P)$, de a) et du fait que le centroïde d'un corps Q quelconque est toujours intérieur au domaine $D = \overline{D} - F$ (on a défini $\overline{D}$ dans e) et F est la frontière de $\overline{D}$) ; on applique ce fait aux corps A_1 et A_2. Le lemme d) résulte de l'application de c) au corps $K_i + Kj$. Le lemme e) est fondé sur l'inégalité $P'T \leqslant PT$ pour $T \in \overline{D}$.

Soit $A_i \neq A_j$. Le lieu géométrique des points équidistants de A_i et A_j est un plan qui divise l'espace en deux domaines, dont celui contenant A_i est appelé F_{ij} . Le produit $C_i = D \prod\limits_{j\neq i} F_{ij}$ est un domaine borné et convexe, contenu dans D ; $D = \overline{D} - F$ (comme ci-dessus) et D est l'ensemble dont parle le lemme e).

f) Soit (K,A) la solution du problème. Nous disons que K est la décomposition de Q fournie par $E_i^* = C_iE$, E étant l'ensemble caractéristique de Q et C_i les ensembles dont parle le lemme e).

En effet, pour une décomposition quelconque E_i de E on obtient

$$S(K,A) = \iiint\limits_E f(P)k^2(P)dv, \quad (dv = dxdydz),$$

où $k(P) = PA_1$ pour $P \in E_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Il est évident que l'on a toujours

$$k(P) \geqslant h(P) = \min(PA_1, PA_2, \ldots, PA_n)$$

et que, par conséquent, la valeur minimum de $S(K,A)$, pour un A donné, est obtenue lorsque $k(P) = h(P)$ presque partout ; or, ce cas n'est réalisé que par la *décomposition spéciale* $\{E_i\}$ définie par les plans équidistants.

Les lemmes b), d) et f) montrent que la solution du problème ne peut être obtenue qu'en réalisant les conditions que l'on ait exactement n points A_i distincts, qu'ils soient les centroïdes des corps partiels K_i et que ces corps soient séparés deux à deux par les plans équidistants relatifs à leurs centroïdes respectifs.

Nous allons établir maintenant l'existence d'une solution, en suivant une voie directe.

Soit m la limite inférieure de $S(X,Y)$ pour tous les (X,Y) possibles ; on aura, pour une suite convenable (X^r, Y^r),

$$\lim_{r\to\infty} S(X^r, Y^r) = m\,. \tag{2}$$

Cette relation subsiste — à cause du lemme d) — lorsqu'on remplace chaque point Y_i^r par le point qui lui est le plus proche parmi les points de $\overline{D}$; on peut donc supposer que tous les $\{Y_i^r\}$ dans (2) appartiennent à $\overline{D}$.

Il s'ensuit que l'on peut extraire de $\{Y_i^r\}$ une suite convergente vers Y^0 : on entend par là $\lim\limits_{r\to\infty} Y_i^r = Y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pour la suite partielle (dont les termes sont désignés ici par les mêmes lettres que ceux de la suite primitive). On en tire

$$\lim_{r\to\infty} S(X^r, Y^0) = m\,. \tag{3}$$

pour une certaine suite $\{X^r\}$. Or, il est possible que les n points Y_i^0 ne soient pas tous distincts ; soit par exemple $Y_1^0 = Y_2^0$. on aura alors

$$I(X_1^r, Y_1^0) + I(X_2^r, Y_2^0) = I(X_1^r + X_2^r, Y_1^0)\,. \tag{4}$$

$X_1^r + X_2^r$ est un nouveau corps partiel qui remplace dans S deux corps de la division primitive ; ce changement n'altère pas la valeur de S à cause de (4). En poursuivant cette réduction de la somme S on aboutit à une expression (X^r, Y^0) avec s termes Y_i^0 distincts $(i = 1, 2, \ldots s \leqslant n)$. Construisons maintenant la division spéciale relative à Y_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, s)$ (cf. lemme f) (cette divison se déduit à $X_1^0 = 0$ dans le cas exceptionnel $s = 1$). Cette division X^0 ne dépend pas de r et on obtient

$$S(X^0, Y^0) \geqslant S(X^r, Y^0). \tag{5}$$

(3) et (5) donnent

$$S(X^0, Y^0) = m. \tag{6}$$

Le nombre des corps partiels dans X^0 est $s \leqslant n$; or l'inégalité $s < n$ est incompatible avec (6) d'après le lemme d) ; on voit donc que $s = n$ (X^0, Y^0) est bien la solution du problème principal de cette Note. Ce résultat démontre la possibilité de satisfaire simultanément aux conditions nécessaires, formulées à la du paragraphe 1. Pour un corps Q donné, le minimum m est une fonction d'une seule variable n ; l'égalité $s = n$

montre que cette fonction est décroissante ; il est aussi facile à voir que l'on a $\lim_{n\to\infty} m(n) = 0$.

La solution du problème, Q et n étant donnés, est en général unique, mais il y a des corps avec une infinité de solutions : la sphère homogène en est un pour tous les n. Bien entendu, il y a des corps avec un nombre fini de solutions différentes : un cube homogène, par exemple, en a trois pour $n = 2$.

Même s'il n'y a qu'une seule solution, les conditions nécessaires du paragraphe 1 ne sont pas suffisantes : un bloc homogène $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$ avec $a > b > c$ fournit un exemple pour $n = 2$; en effet, en le coupant par le plan $w = 0$ en deux et en posant $A_1 = (-a/2, 0, 0)$, $A_2 = (a/2, 0, 0)$, on obtient la solution unique, mais on peut couper le bloc par le plan $y = 0$ ou par le plan $x = 0$ [2] pour obtenir deux autres divisions qui satisfont aux conditions nécessaires sans toutefois fournir le minimum.

Dans les applications il n'y aura pour la plupart qu'un seul (K, A) satisfaisant aux conditions nécessaires ; il paraît que dans ce cas la solution peut être trouvée en partant d'une décomposition K^1 arbitraire en n parties, en définissant A_i^r ($i = 1, 2, \ldots, n$) comme centroïde de K_i^r, et K^{r+1} comme la décomposition spéciale relative à A^r, pour tous les r naturels ; or, il nous manque une démonstration de la convergence de (K^r, A^r) pour $r \to \infty$ vers la solution cherchée.

La question se pose, si l'existence d'une infinité de solutions pour chaque $n (\geqslant 2)$ implique que Q soit un corps de révolution. Une autre question : si l'on a pour un Q donné plusieurs solutions pour certains n, l'ensemble de ces n est-il nécessairement infini ?

Diverses questions, par exemple celles des types en anthropologie, ou bien d'autres, d'ordre pratique, comme celles de la normalisation des objets industriels, exigent pour leur solution la détermination de n représentants fictifs d'une nombreuse population, choisis de manière à réduire autant que possible les écarts entre les éléments de la population et ceux de l'échantillon, l'écart étant mesuré entre tout élément réel et l'élément fictif qui lui est le plus proche — voilà les considérations qui ont conduit l'auteur à étudier le cas spécial traité dans cette Note.

2. NDLR : probablement plutôt $z = 0$.