

FILTRAGE DE MULTIPLES SISMIQUES PAR ONDELETTES ET OPTIMISATION CONVEXE



¹ IFP Energies nouvelles, Dir. Technologie
1 et 4 Av. de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison
{mai-quyen.pham, laurent.duval}@ifpen.fr

M.-Q. Pham^{1,3}, C. Chaux², L. Duval¹ et J.-C. Pesquet³
² Aix-Marseille Univ. LATP UMR CNRS 7353
39 rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille – France
caroline.chaux@latp.univ-mrs.fr



³ Univ. Paris-Est, LIGM UMR CNRS 8049
5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée – France
pesquet@univ-mlv.fr

Formulation du problème

$$z^{(n)} = y^{(n)} + s^{(n)} + b^{(n)} = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{p=p'}^{p'+P_j-1} h_j^{(n)}(p) r_j^{(n-p)} + b^{(n)}$$

- Signal observé : $z^{(n)}$; primaire : $y^{(n)}$; bruit gaussien : $b^{(n)}$
- Approcher le multiple $s^{(n)}$ à partir de J modèles $r_j^{(n)}$
- Problème inverse réduit à des filtres $h_j^{(n)}(p)$ variant dans le temps
- Contraintes de parcimonie supplémentaires prises en compte

Maximum a posteriori

$$\underset{y \in \mathbb{R}^N, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q}{\text{minimiser}} \psi(z - y - \mathbf{R}\mathbf{h}) \quad \text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \varphi(Fy) \leq \beta \\ \tilde{\rho}(\mathbf{L}\mathbf{h}) \leq \lambda \\ \mathbf{h} \in \bigcap_{m=1}^M C_m \end{cases}$$

- Opérateur de trame : F ; opérateur linéaire : \mathbf{L}
- Terme de fidélité aux données :
 $\Psi \triangleq \psi(z - [\mathbf{I} \ \mathbf{R}]\cdot)$
- *A priori* sous forme de contraintes
 $C_\varphi = \{\pi_\varphi \in \mathbb{R}^K \mid \varphi(\pi_\varphi) \leq \beta\}$
 $C_{\tilde{\rho}} = \{\pi_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{R}^{N \times NP} \mid \tilde{\rho}(\pi_{\tilde{\rho}}) \leq \lambda\}$
- Exemple : $M = 2$ filtres variant lentement au cours du temps

$$C_1 = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q \mid \forall (j, p), \forall n \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \right\}, \right. \\ \left. |h_j^{(2n+1)}(p) - h_j^{(2n)}(p)| \leq \varepsilon_{j,p} \right\}$$

$$C_2 = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q \mid \forall (j, p), \forall n \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \right\}, \right. \\ \left. |h_j^{(2n)}(p) - h_j^{(2n-1)}(p)| \leq \varepsilon_{j,p} \right\}$$

Algorithme primal-dual M+LFBF

Soit $\gamma^{[i]} \in [\epsilon, \frac{1-\epsilon}{\beta}]$. Soient $\begin{bmatrix} y^{[0]} \\ \mathbf{h}^{[0]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+NP}$, $v_1^{[0]} \in \mathbb{R}^K$, $u_1^{[0]} \in \mathbb{R}^{NP}$

$\mathcal{G}, (u_{2,m}^{[0]})_{1 \leq m \leq M} \in (\mathbb{R}^{NP})^M$

pour $i = 0, 1, \dots$ **faire**

Calcul du gradient

$$\begin{bmatrix} s_1^{[i]} \\ t_1^{[i]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} - \gamma^{[i]} \left(\nabla \Psi \left(\begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} F^* v_1^{[i]} \\ \mathbf{L}^* u_1^{[i]} + \sum_{m=1}^M u_{2,m}^{[i]} \end{bmatrix} \right)$$

Calcul des projections

$$s_2^{[i]} = v_1^{[i]} + \gamma^{[i]} F y^{[i]} \quad \text{et} \quad t_{2,1}^{[i]} = u_1^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{L} \mathbf{h}^{[i]}$$

$$w_1^{[i]} = s_2^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_\varphi} \left(\frac{s_2^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right) \quad \text{et} \quad w_{2,1}^{[i]} = t_{2,1}^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_{\tilde{\rho}}} \left(\frac{t_{2,1}^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right)$$

$$\left(t_{2,2,m}^{[i]} = u_{2,m}^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{h}^{[i]} \right)_{1 \leq m \leq M}$$

$$\left(w_{2,2,m}^{[i]} = t_{2,2,m}^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_m} \left(\frac{t_{2,2,m}^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right) \right)_{1 \leq m \leq M}$$

Moyenne

$$q_{1,1}^{[i]} = w_1^{[i]} + \gamma^{[i]} F s_1^{[i]} \quad \text{et} \quad q_{2,1}^{[i]} = w_{2,1}^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{L} t_1^{[i]}$$

$$v_1^{[i+1]} = v_1^{[i]} - s_2^{[i]} + q_{1,1}^{[i]} \quad \text{et} \quad u_1^{[i+1]} = u_1^{[i]} - t_{2,1}^{[i]} + q_{2,1}^{[i]}$$

$$\left(q_{2,2,m}^{[i]} = w_{2,2,m}^{[i]} + \gamma^{[i]} t_1^{[i]} \right)_{1 \leq m \leq M}$$

Mise à jour

$$\begin{bmatrix} y^{[i+1]} \\ \mathbf{h}^{[i+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} - \gamma^{[i]} \left(\nabla \Psi \left(\begin{bmatrix} s_1^{[i]} \\ t_1^{[i]} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} F^* w_1^{[i]} \\ \mathbf{L}^* w_{2,1}^{[i]} + \sum_{m=1}^M w_{2,2,m}^{[i]} \end{bmatrix} \right)$$

fin pour

Convergence

Soient μ la constante de Lipschitz de Ψ , $\beta = \mu + \sqrt{\max(\|F\|^2, \|\mathbf{L}\|^2) + M}$
et $\epsilon \in]0, \frac{1}{\beta+1}[$, le pas $\gamma^{[i]}$ à l'itération i doit être choisi dans $[\epsilon, \frac{1-\epsilon}{\beta}]$

– Si $\psi = \|\cdot\|^2$ alors,

$$\nabla \Psi = -2[\mathbf{I} \ \mathbf{R}]^\top \nabla \psi(z - [\mathbf{I} \ \mathbf{R}]\cdot) \implies \mu = 2(1 + \|\mathbf{R}\|^2)$$

– Π_C : projection sur l'ensemble convexe C

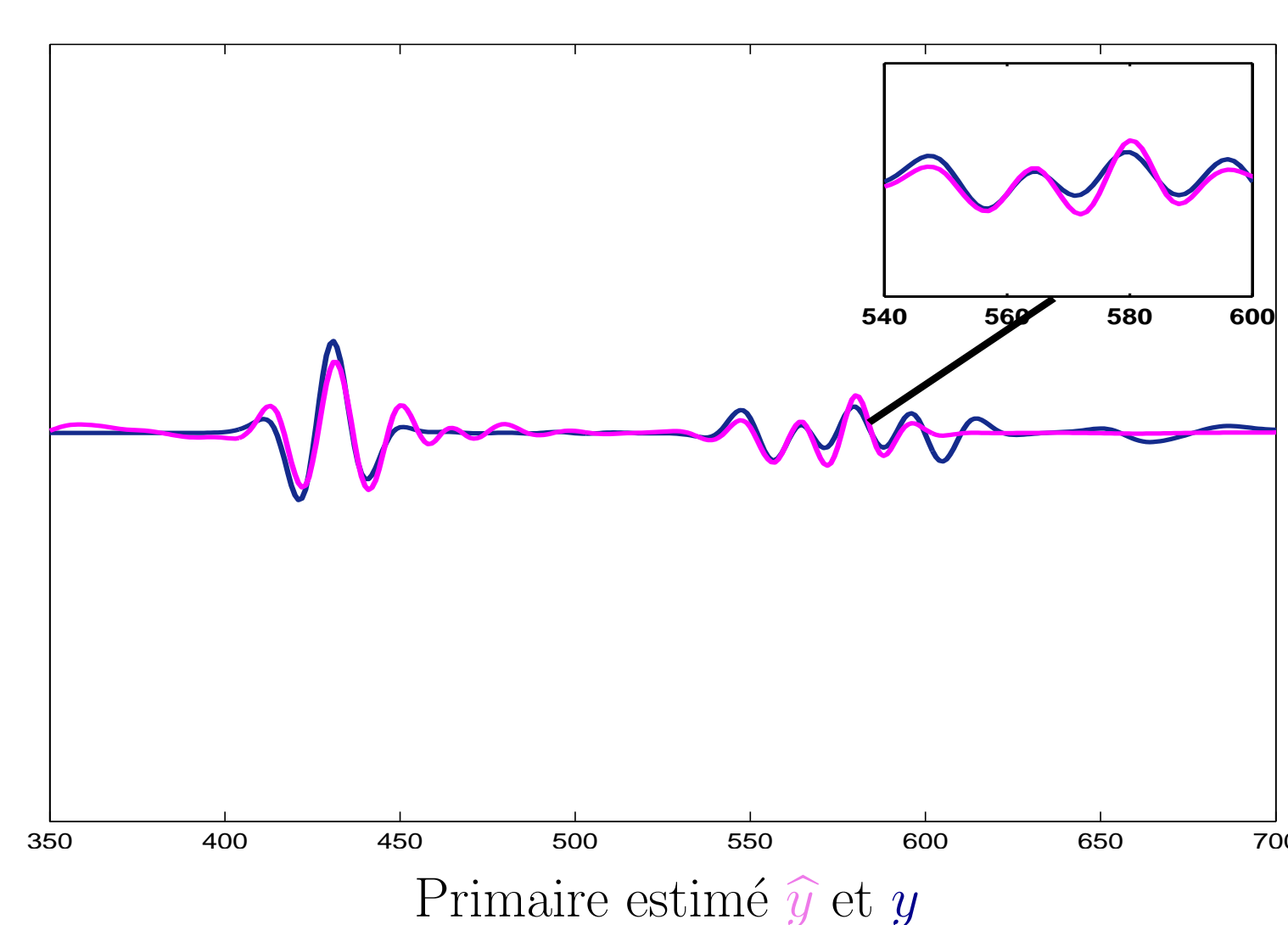
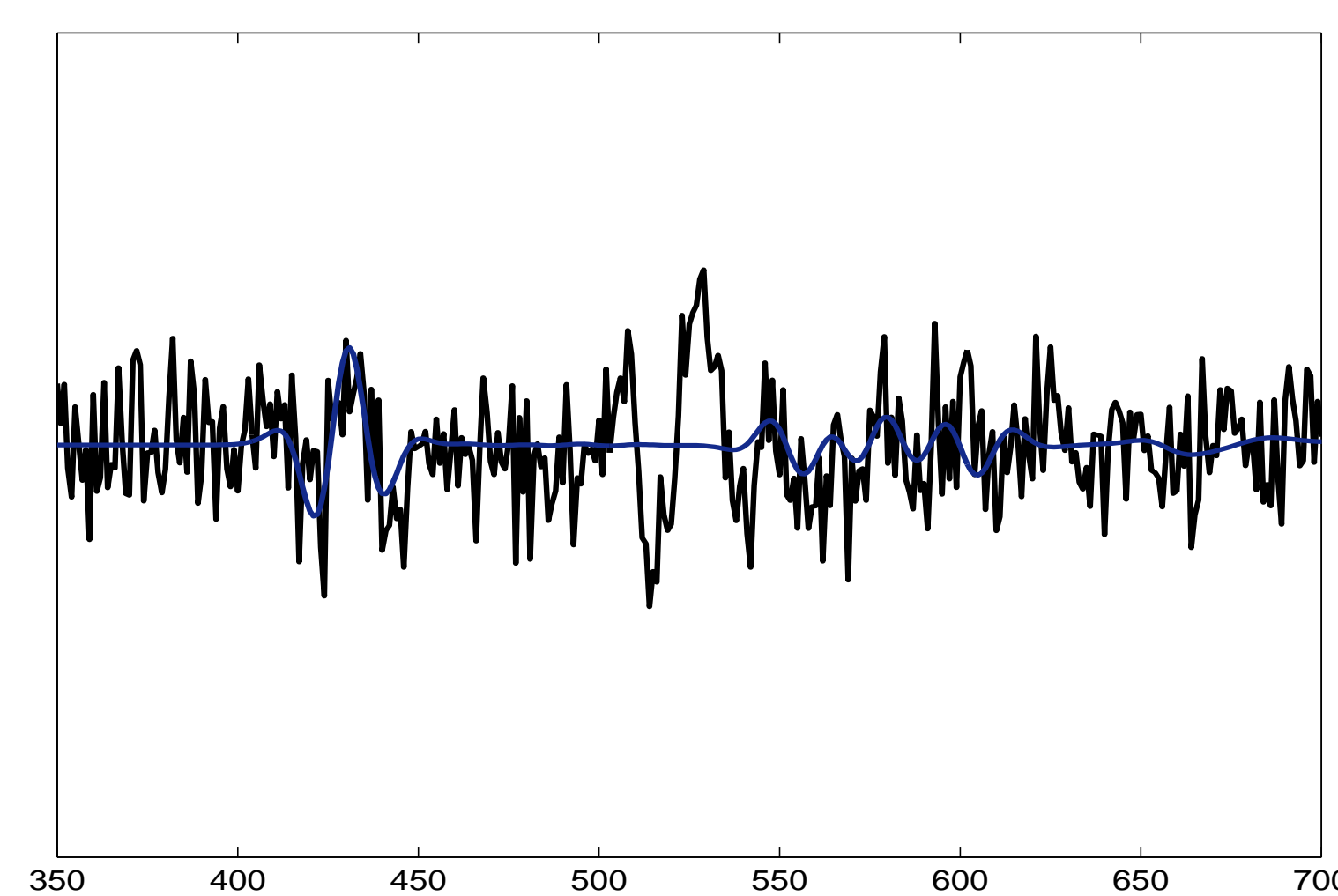
Simulations

Résultats quantitatifs

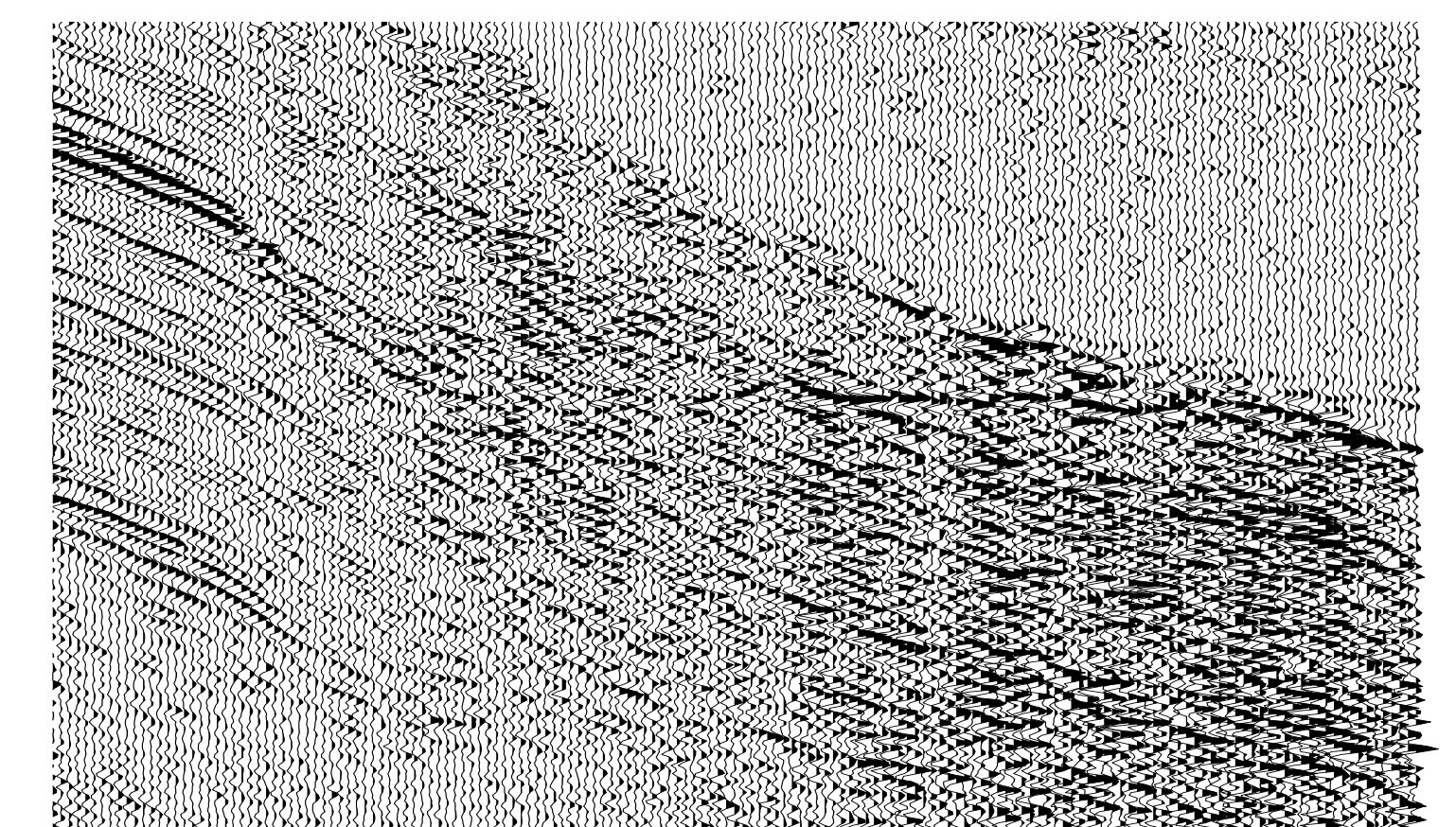
- $\psi = \|\cdot\|^2$, $\varphi = \ell_1$, $\tilde{\rho} = \ell_1, \ell_2$ ou $\ell_{1,2}$
- $N = 1024$; $P_1 = 10, P_2 = 14$
- Nb. d'itérations ≤ 10000 (arrêt : $\|y_{i+1} - y_i\| < 10^{-6}$)
- λ, β calculés empiriquement sur les signaux idéaux (avec un traitement plus standard)
- Contraintes : $\varepsilon_{1,p} = 0.1$ et $\varepsilon_{2,p} = 0.07 \forall p$
- F : ondelettes *Symmetlet* (non décimées) de longueur 8 avec 4 niveaux de résolution
- Moyennes du rapport signal à bruit (RSB) sur 100 réalisations de bruit, obtenues lors de l'estimation conjointe de y et s :

$\sigma \setminus \tilde{\rho}$	RSB _y			RSB _s		
	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_{1,2}$	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_{1,2}$
0.01	22.46	22.60	22.75	25.86	25.88	26.10
0.02	22.03	21.93	22.15	23.25	23.48	23.40
0.04	20.53	20.10	20.49	19.65	20.19	19.85
0.08	17.59	17.17	17.55	15.88	16.65	16.15

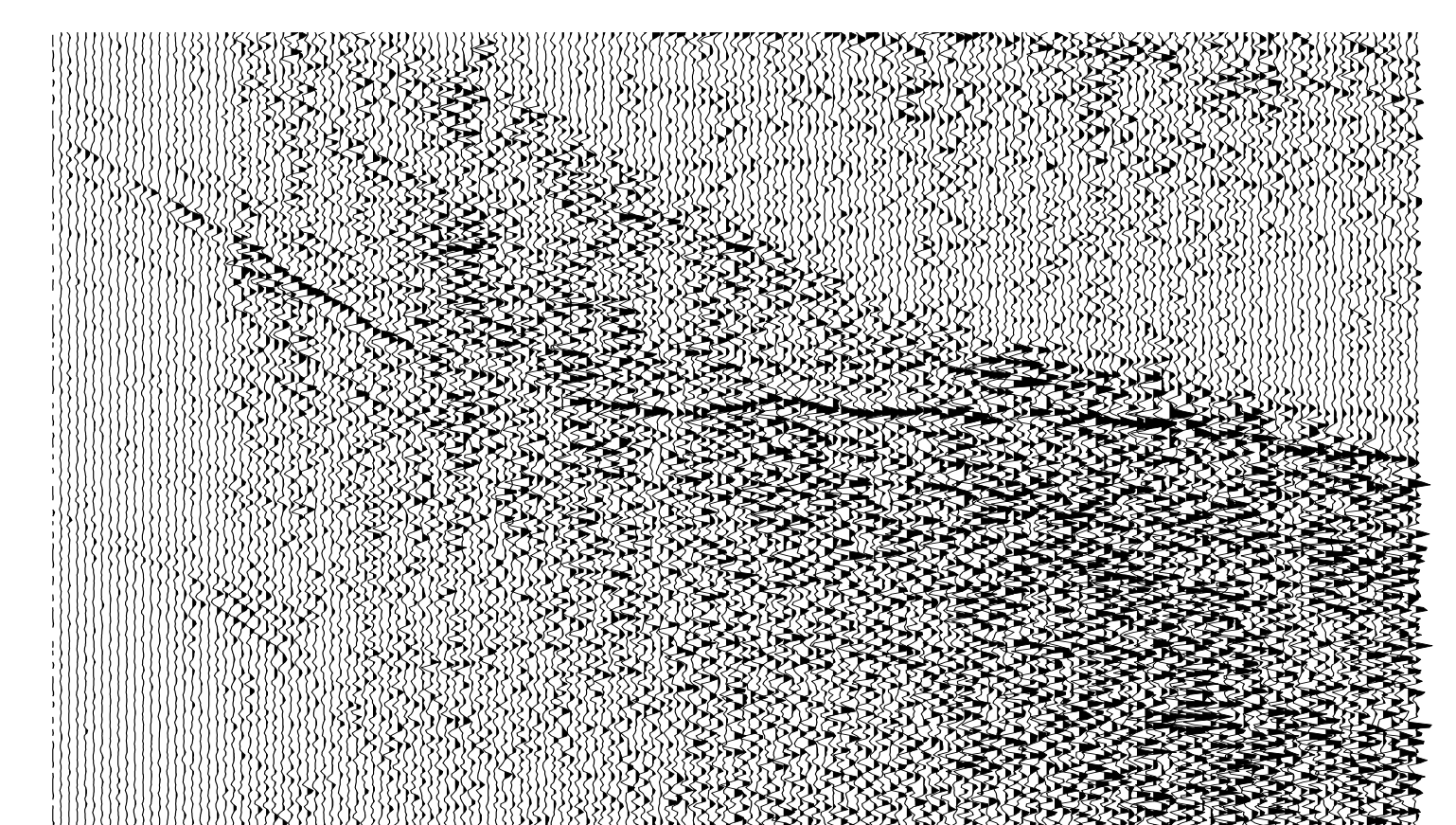
1D synthétique ($\sigma = 0.08$)



2D réelles



Données enregistrées



Primaire estimé

Références

[1] M. Q. Pham, C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. “Sparse template-based adaptive filtering with a primal-dual proximal algorithm : application to seismic multiple removal.” En préparation.

[2] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Primal-dual splitting algorithm for solving inclusions with mixtures of composite, Lipschitzian, and parallel-sum type monotone operators,” *Set-Valued Var. Anal.*, vol. 20, no. 2, pp. 307–330, Jun. 2012.

[3] E. van den Berg and M. P. Friedlander. Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(2) :890–912, Nov. 2008.