

Filtrage de multiples sismiques par ondelettes et optimisation convexe

Mai QUYEN PHAM^{1,3}, Caroline CHAUX², Laurent DUVAL¹, Jean-Christophe PESQUET³

¹IFP Energies nouvelles, 92852 Rueil-Malmaison

²Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, LATP, UMR 7353, 13453 Marseille

³Université Paris-Est, LIGM, UMR 8049, 77454 Marne-la-Vallée

{mai-quyen.pham, laurent.duval}@ifpen.fr,
caroline.chaux@latp.univ-mrs.fr, pesquet@univ-mlv.fr

Résumé – Nous considérons le problème de filtrage adaptatif de données sismiques composées : de signaux d'intérêts ("primaires"), de perturbations structurées correspondant à des propagations d'ondes présentant des réflexions multiples ("multiples") et de bruit aléatoire. Ces signaux parasites, très énergétiques, peuvent dissimuler les réflexions primaires intéressantes, correspondant aux interfaces entre couches du sous-sol. Elles peuvent être filtrées à partir de modèles approchés qu'il faut adapter en délai, amplitude et fréquence. Ce travail permet de contraindre cette adaptation, sous forme de combinaisons de filtres glissants à réponses impulsionnelles finies, à varier lentement en fonction de la profondeur, respectant les variations géologiques attendues. Les approches antérieures pour ce problème, très important en sismique réflexion, ne semblent pas prendre en compte de contraintes sur l'adaptation, et peuvent produire des filtres très mal conditionnés, du fait notamment du caractère passe-bande des données sismiques. Cette formulation du problème permet par ailleurs d'introduire, et de résoudre par optimisation convexe, des *a priori* de parcimonie des signaux dans des trames d'ondelettes ainsi que de prendre en compte un bruit additif gaussien. Les multiples sont très bien estimés. La restauration des primaires réalisée permet au géophysicien de voir émerger des résidus de signal utile, même en présence de bruit fort.

Abstract – We are interested here in adaptive filtering of seismic data composed of: signals of interest ("primaries"), structured perturbations ("multiples") and random noise. These undesired, energetic, signals may hide primary reflexions of interest, that correspond to underground layer interfaces. They can be filtered, based on approximate models that should be adapted in delay, amplitude and frequency. This work allows us to constrain this adaptation through nonstationary, finite impulse response filters, that slowly vary w.r.t. depth, thus complying with assumed geological variations. Previous works on multiple removal, which constitutes an important issue in reflection seismology, do not apparently take into account such constraints on the matching filter, thus introducing ill-conditioned responses, owing to band-pass nature of seismic data. The problem formulation also allows the introduction sparsity priors on the wavelet frame coefficients for primaries, by using convex optimization tools, and the management of additive Gaussian random noise. Multiples are well estimated. The restoration of primaries allows the geophysist to capture emerging desired signal residues, even in strong random noise conditions.

1 Introduction

Les méthodes d'exploration sismique sont basées essentiellement sur la propagation d'ondes dans le sous-sol. Une onde source (tir) est générée en surface ou à proximité de la surface de l'eau, pour la sismique terrestre ou marine, respectivement. Les ondes qui se propagent sont réfléchies ou réfractées aux interfaces des couches géologiques. Après une succession de transmissions et de réflexions, une partie de l'énergie de l'ébranlement peut être enregistrée par des capteurs sismiques (géophones ou hydrophones) localisés à proximité de la surface. Ces capteurs font l'acquisition de signaux correspondant aux amplitudes et temps de propagation des ondes considérées. Ces signaux temporels, appelés "traces sismiques" possèdent un spectre de fréquence allant de quelques Hertz à moins de cent Hertz en général. Une acquisition sismique consiste en la collecte de traces sismiques (z) issues de capteurs répartis de façon structurée, formant des antennes acoustiques en sur-

face ou remorquées par des navires, ce pour un grand nombre de tirs générés en différentes positions. Par analyse conjointe des traces sismiques, il est possible de déterminer les distances relatives entre les interfaces géologiques et les contrastes de vitesse des ondes s'y propageant, comme illustré dans l'animation indiquée en note ¹, pour la sismique marine.

Ces données sismiques sont affectées de nombreuses distorsions, dues à des trajets de propagation complexes, au dispositif d'acquisition, à des sources liées ou non à l'acquisition (ondes de surface, diffraction des ondes sur des hétérogénéités de terrain, effets de houle et de vent, impacts sur des lignes de capteurs [1]). En général, ces distorsions ne sont pas principalement aléatoires. Ces signaux parasites sont souvent structurés et de forte amplitude, recouvrant les informations utiles correspondant aux réflexions intéressantes. Un objet du traitement géophysique [1] est l'extraction d'information per-

1. <http://flotte.ifremer.fr/var/storage/original/application/5f818155e10bf041507115c1a28a78ad.swf>

tinente à partir de ces importants volumes de données. Du fait de la complexité des champs d'ondes interférents, la géophysique est à l'origine du développement de méthodes de traitement de signal très importantes comme la déconvolution sous contrainte de norme ℓ_1 [2], potentiellement plus robuste, ou les transformées en ondelettes continues [3], capables de décorréler les données. Ces deux méthodes sont également promotrices de formes de parcimonie. Nous nous intéressons ici au filtrage adaptatif de réflexions sismiques multiples, à partir de modèles approximatifs. Ce filtrage est réalisé dans un domaine de trames d'ondelettes discrètes, sous contraintes de parcimonie et de variation lente des filtres adaptatifs. Cette contrainte sur les coefficients de filtres semble nouvelle. Elle est intéressante en sismique réflexion, car les méthodes standard produisent des filtres très mal conditionnés, du fait notamment du caractère passe-bande des données sismiques. La technique proposée améliore de [4], par la prise en compte de plusieurs modèles et d'un bruit adaptatif, ainsi que de [5], par la reformulation sous forme contrainte, permettant une éviction (partielle) d'hyperparamètres d'estimation fastidieuse.

Par l'approche proposée, les multiples semblent particulièrement bien estimés, tandis que la restauration des primaires permet au moins au géophysicien de voir émerger des traces du signal utile, et donc d'interfaces géologiques potentielles, même en présence de bruit aléatoire fort. La formulation du problème en termes de modèles et de filtrage adaptatif est abordée dans la section 2. Sa reformulation sous forme variationnelle, ainsi que sa résolution par un algorithme primal-dual, sont traitées dans la section 3. La section 4 présente l'application aux données sismiques par des simulations justifiant l'approche proposée. La section 5 conclut et propose quelques perspectives.

2 Formulation du problème

Les champs d'ondes sont référencés par la position spatiale des capteurs et du tir. Les méthodes sismiques sont souvent multidimensionnelles, afin de mieux traduire des effets de propagation entre tirs et entre capteurs, au risque de lisser des détails haute-fréquence, utiles en sismique haute-résolution. Nous avons donc choisi de traiter de signaux monodimensionnels, à variable temporelle, bien que la méthode proposée s'étende naturellement en dimension supérieure. Les ondes les plus utiles, appelées primaires (y), correspondent à des champs d'ondes en transmission/réflexion descendante puis ascendante. Les réflexions multiples (s) figurent parmi les distorsions les plus gênantes. Elles correspondent à des ondes sismiques subissant au moins un rebond entre deux interfaces. Elles possèdent des formes d'ondes semblables aux réflexions primaires. Ces réverbérations diffèrent des primaires par des variations d'amplitude et de délai qui peuvent amener à les confondre avec des primaires d'interfaces plus profondes. L'un des standards industriels en suppression de multiples repose sur la modélisation approximative de ces réflexions parasites. Après adaptation de ces modèles en amplitude, délai et fréquence, le modèle

adapté est soustrait aux données sismiques, afin de mettre en évidence des primaires restaurés. Ce type de filtrage adaptatif variant en temps peut être effectué par exemple dans le domaine des ondelettes complexes continues [6]. Quand les propagations sont très compliquées, on peut recourir à plusieurs modèles (on considère ici J modèles) de multiples représentatifs de différentes modélisations. Ces modèles de référence sont numériquement structurés sous forme d'une matrice \mathbf{R} . Afin d'alléger la formulation, nous renvoyons à [4] et à [7] pour des précisions sur les notations. Nous faisons l'hypothèse que les multiples (s) sont liés, par une relation linéaire à support borné (correspondant à un filtre RIF), variant lentement dans le temps, aux modèles \mathbf{R} , pouvant s'écrire $s = \mathbf{R}\mathbf{h}$. Cette formulation encode l'intuition géologique que les écarts instantanés en amplitude et en délai entre les multiples et les modèles ne varient que lentement avec la dimension de profondeur du sous-sol. Elle permet en outre une contrainte de l'espace des solutions possibles, requise par les imprécisions dans les modèles et les bruits additionnels, d'apparence plus aléatoire, pouvant provenir de mélanges de champs d'ondes, d'hétérogénéité de surface, etc. Enfin, des hypothèses additionnelles de parcimonie des signaux dans un domaine ondelette peuvent être ajoutées.

3 Méthode proposée

3.1 Formulation variationnelle du problème

Ces connaissances *a priori* peuvent être exprimées sous la forme de termes de régularisation [4]. Toutefois, nous optons ici pour une formulation sous contraintes, contournant (partiellement, cf. section 4) le problème d'estimation des hyperparamètres de régularisation. L'objectif est désormais d'estimer à la fois le vecteur de filtres variants dans le temps $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^Q$ et le signal d'intérêt $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$. Le problème de minimisation devient :

$$\underset{y \in \mathbb{R}^N, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q}{\text{minimiser } \psi(z - y - \mathbf{R}\mathbf{h})} \quad \text{sous contraintes} \quad \begin{cases} \mathbf{h} \in \bigcap_{m=1}^M C_m \\ \tilde{\rho}(\mathbf{L}\mathbf{h}) \leq \lambda \\ \varphi(Fy) \leq \beta \end{cases} \quad (1)$$

où $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow]-\infty, +\infty]$, $\varphi : \mathbb{R}^K \rightarrow]-\infty, +\infty]$, $\tilde{\rho} : \mathcal{G} \rightarrow]-\infty, +\infty]$, \mathcal{G} est un espace de Hilbert réel et pour chaque $m \in \{1, \dots, M\}$, C_m représente un ensemble convexe fermé de \mathbb{R}^Q . $F \in \mathbb{R}^{K \times N}$ modélise un opérateur de trame [8] (*frame*) et \mathbf{L} est un opérateur linéaire de \mathbb{R}^Q vers \mathcal{G} . Dans la suite, les fonctions ψ (fidélité aux données), φ (*a priori* sur les coefficients de décomposition du signal d'intérêt) et $\tilde{\rho}$ (*a priori* sur les filtres) sont supposées convexes, propres et semi-continues inférieurement.

L'approche proposée ici diffère essentiellement de [4], sous plusieurs aspects : 1) la prise en compte d'un bruit additif s'ajoutant aux observations ; 2) la possibilité d'utiliser non seulement

des bases, mais plus généralement des trames (opérateur F) ; 3) la prise en compte d'un opérateur linéaire \mathbf{L} permettant d'élargir la classe d'*a priori* possibles pour \mathbf{h} . Plus récemment [7], nous avons proposé une approche régularisée plutôt que sous contrainte, pour laquelle la détermination des paramètres de régularisation s'est révélée cruciale et complexe. Nous proposons donc ici une approche sous contrainte, les bornes associées étant souvent plus faciles à déterminer (cf. section 4).

3.2 Algorithme primal-dual pour résoudre (1)

Le problème considéré est un problème d'optimisation convexe faisant intervenir des opérateurs linéaires variés. Les algorithmes primaux-duaux, et plus précisément l'algorithme M+LFBF (Monotone+Lipschitz Forward-Backward-Forward, [9]), peuvent être utilisés pour résoudre (1) efficacement. Dans ce cas, la solution numérique est calculée par l'algorithme 1.

Algorithm 1 Algo. primal-dual M+LFBF pour résoudre (1)

Soit $\gamma^{[i]} \in [\epsilon, \frac{1-\epsilon}{\beta}]$. Soient $\begin{bmatrix} y^{[0]} \\ \mathbf{h}^{[0]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+NP}$, $v_1^{[0]} \in \mathbb{R}^K$, $u_1^{[0]} \in \mathcal{G}$, $(u_{2,m}^{[0]})_{1 \leq m \leq M} \in (\mathbb{R}^{NP})^M$
pour $i = 0, 1, \dots$ **faire**
 Calcul du gradient

$$\begin{bmatrix} s_1^{[i]} \\ t_1^{[i]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} - \gamma^{[i]} \left(\nabla \Psi \left(\begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} F^* v_1^{[i]} \\ \mathbf{L}^* u_1^{[i]} + \sum_{m=1}^M u_{2,m}^{[i]} \end{bmatrix} \right)$$

 Calcul des projections
 $s_2^{[i]} = v_1^{[i]} + \gamma^{[i]} F y^{[i]}$ et $t_{2,1}^{[i]} = u_1^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{L} \mathbf{h}^{[i]}$
 $w_1^{[i]} = s_2^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_\varphi} \left(\frac{s_2^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right)$ et $w_{2,1}^{[i]} = t_{2,1}^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_{\tilde{\rho}}} \left(\frac{t_{2,1}^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right)$
 pour $m = 1, 2, \dots, M$ **faire**
 $t_{2,2,m}^{[i]} = u_{2,m}^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{h}^{[i]}$
 $w_{2,2,m}^{[i]} = t_{2,2,m}^{[i]} - \gamma^{[i]} \Pi_{C_m} \left(\frac{t_{2,2,m}^{[i]}}{\gamma^{[i]}} \right)$
 fin pour
 Moyenne
 $q_{1,1}^{[i]} = w_1^{[i]} + \gamma^{[i]} F s_1^{[i]}$ et $q_{2,1}^{[i]} = w_{2,1}^{[i]} + \gamma^{[i]} \mathbf{L} t_1^{[i]}$
 $v_1^{[i+1]} = v_1^{[i]} - s_2^{[i]} + q_{1,1}^{[i]}$ et $u_1^{[i+1]} = u_1^{[i]} - t_{2,1}^{[i]} + q_{2,1}^{[i]}$
 pour $m = 1, 2, \dots, M$ **faire**
 $q_{2,2,m}^{[i]} = w_{2,2,m}^{[i]} + \gamma^{[i]} t_1^{[i]}$
 $u_{2,m}^{[i+1]} = u_{2,m}^{[i]} - t_{2,2,m}^{[i]} + q_{2,2,m}^{[i]}$
 fin pour
 Mise à jour

$$\begin{bmatrix} y^{[i+1]} \\ \mathbf{h}^{[i+1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{[i]} \\ \mathbf{h}^{[i]} \end{bmatrix} - \gamma^{[i]} \left(\nabla \Psi \left(\begin{bmatrix} s_1^{[i]} \\ t_1^{[i]} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} F^* w_1^{[i]} \\ \mathbf{L}^* w_{2,1}^{[i]} + \sum_{m=1}^M w_{2,2,m}^{[i]} \end{bmatrix} \right)$$

 fin pour

Comme on peut le voir, cet algorithme requiert le calcul du gradient des fonctions différentiables de gradient Lipschitz et le calcul des opérateurs proximaux [10] (noté prox) des autres fonctions. Dans le cas où C est un ensemble convexe fermé non vide de \mathcal{H} , prox_{ι_C} consiste à calculer la projection Π_C sur C

(ι_C est la fonction indicatrice de C , i.e., $(\forall u \in \mathcal{H}) \iota_C(u) = 0$ si $u \in C$, $+\infty$ sinon).

Nous avons choisi $\Psi \triangleq \psi(z - [\mathbf{I} \ \mathbf{R}] \cdot)$, de gradient Lipschitz et son gradient, noté $\nabla \Psi$, est défini par $\nabla \Psi = -[\mathbf{I} \ \mathbf{R}]^\top \nabla \psi(z - [\mathbf{I} \ \mathbf{R}] \cdot)$. Les *a priori* sont formulés sous forme de contraintes, définies par $C_\varphi = \{\pi_\varphi \in \mathbb{R}^K \mid \varphi(\pi_\varphi) \leq \beta\}$ pour les coefficients de trames et $C_{\tilde{\rho}} = \{\pi_{\tilde{\rho}} \in \mathbb{R}^{N \times NP} \mid \tilde{\rho}(\pi_{\tilde{\rho}}) \leq \lambda\}$ pour les contraintes de filtres. Calculer les opérateurs proximaux liés à ces contraintes revient à calculer les projections Π_{C_φ} et $\Pi_{C_{\tilde{\rho}}}$. Il faut également calculer les projections $(\Pi_{C_m})_{1 \leq m \leq M}$ (cf. paragraphe suivant).

L'utilisation de cet algorithme requiert la détermination de la norme (*a minima* d'une borne supérieure) de chaque opérateur linéaire impliqué dans le critère. Soient μ la constante de Lipschitz du terme d'attache aux données Ψ , en définissant $\beta = \mu + \sqrt{\max(\|F\|^2, \|\mathbf{L}\|^2) + M}$ et $\epsilon \in]0, \frac{1}{\beta+1}[$, le pas $\gamma^{[i]}$ à l'itération i doit être choisi de manière à satisfaire la relation : $\gamma^{[i]} \in [\epsilon, \frac{1-\epsilon}{\beta}]$.

4 Application aux signaux sismiques

4.1 Choix des fonctions et ensembles convexes

En sismique, le bruit b peut être pris additif et gaussien, centré, de variance σ^2 . Un choix naturel pour le terme de fidélité est donc $\Psi = \frac{1}{\sigma^2} \|\cdot\|^2$, dont le gradient se calcule facilement. Par ailleurs, la constante de Lipschitz est donnée dans ce cas par $\frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{I} \ \mathbf{R}\|^2$.

Dans notre exemple, on choisit $M = 2$ pour les contraintes, et on définit :

$$C_1 = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q \mid \forall (j, p), \forall n \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 \right\}, \right. \\ \left. |h_j^{(2n+1)}(p) - h_j^{(2n)}(p)| \leq \varepsilon_{j,p} \right\} \quad (2)$$

$$C_2 = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^Q \mid \forall (j, p), \forall n \in \left\{ 1, \dots, \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \right\}, \right. \\ \left. |h_j^{(2n)}(p) - h_j^{(2n-1)}(p)| \leq \varepsilon_{j,p} \right\}. \quad (3)$$

Ces contraintes permettent, pour chaque modèle j , de contraindre les coefficients des filtres (indiqués par p) à des variations lentes au cours du temps n . Le choix $M = 2$ permet de simplifier la formulation de la variation d'un coefficient donné d'un filtre entre deux instants consécutifs. Les projections sur C_1 et C_2 , se réduisant à des projections sur des hyperplans de \mathbb{R}^2 , ont des formes explicites.

On choisit la norme ℓ_1 pour φ , afin de promouvoir une certaine forme de parcimonie des coefficients de décomposition sur une trame du signal d'intérêt y . La projection associée s'effectue sur la boule ℓ_1 . Elle peut être réalisée par un algorithme itératif avec un nombre fini d'itérations [11].

Enfin, la dernière contrainte portant sur les filtres ($\tilde{\rho}$) est plus difficile à fixer. Nous avons étudié plusieurs cas : la norme ℓ_1 (la

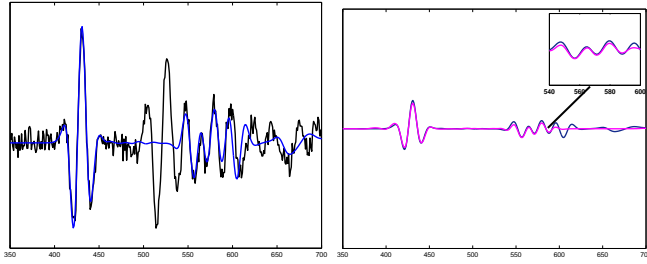


FIGURE 1 – À gauche : signal observé z (en noir ; $\sigma = 0.01$), le primaire y (en bleu) ; à droite : primaire estimé \hat{y} (en rose) et le primaire y (en bleu). Ici $\tilde{\rho}$ est la norme $\ell_{1,2}$.

projection est réalisée comme décrit précédemment), la norme ℓ_2 (la projection est explicite) et enfin la norme $\ell_{1,2}$ (on peut également utiliser [11]). Les résultats sont présentés dans le paragraphe suivant.

4.2 Simulations numériques

Le tableau 1 donne les rapports signal à bruit (RSB) obtenus lors de l'estimation conjointe de y et s . Ces résultats correspondant à l'emploi de trames redondantes (ondelettes discrètes non décimées) utilisant des *Symmet* de longueur 8 sur 4 niveaux de résolution.

L'influence du type d'ondelettes sur les résultats d'estimation est faible même si l'on peut noter une légère supériorité pour les ondelettes de Daubechies ou les *Symmet*. En revanche, le nombre de niveaux de résolution doit être choisi judicieusement : dans notre cas 4 niveaux de résolution sont suffisants.

Les bornes des contraintes sont calculées empiriquement sur les signaux idéaux. Dans le cas de signaux réels, on peut envisager de réaliser une première estimation des signaux (par exemple, en utilisant [6]) et d'estimer les bornes sur ces signaux estimés.

Les simulations ont été lancées pour trois *a priori* $\tilde{\rho}$ différents et pour quatre écart-types de bruit σ . Les résultats visuels (figures 1 et 2) montrent que les multiples sont très bien estimés. Le signal d'intérêt est lui aussi bien reconstruit lorsqu'il a une intensité suffisante. Néanmoins, lorsque les rapports d'amplitude multiples/primaires augmentent, l'estimation des primaires devient plus difficile.

$\sigma \setminus \tilde{\rho}$	RSB _{y}			RSB _{s}		
	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_{1,2}$	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_{1,2}$
0.01	22.46	22.60	22.75	25.86	25.88	26.10
0.02	22.03	21.93	22.15	23.25	23.48	23.40
0.04	20.53	20.10	20.49	19.65	20.19	19.85
0.08	17.59	17.17	17.55	15.88	16.65	16.15

TABLE 1 – RSB moyen (100 réalisations) pour l'estimation du primaire y (gauche) et des multiples s (droite).

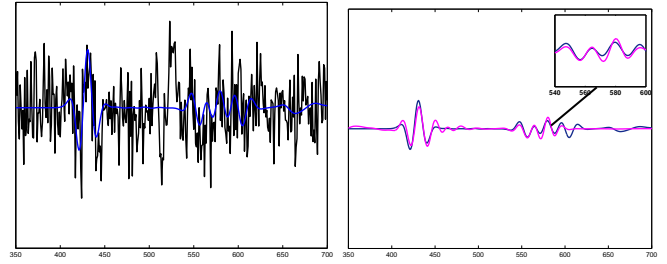


FIGURE 2 – À gauche : signal observé z (en noir ; $\sigma = 0.08$), le primaire y (en bleu) ; à droite : primaire estimé \hat{y} (en rose) et le primaire y (en bleu). Ici $\tilde{\rho}$ est la norme $\ell_{1,2}$.

5 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme d'optimisation de type primal-dual pour aborder le problème de soustraction de multiples dans des données sismiques. Cette approche permet de contraindre l'espace des solutions par des observations inspirées de la géophysique. Le signal d'intérêt (primaire) ainsi que les signaux parasites (multiples) sont estimés simultanément. Par ailleurs, une extension au cas bidimensionnel ainsi que des comparaisons plus poussées avec les méthodes de l'état de l'art, tant sur l'aspect théorique qu'expérimental, sont en cours.

Références

- [1] J. Mars, J.-L. Mari, J.-L. Lacoume, and F. Glangeaud. *Traitement du signal pour géologues et géophysiciens : Techniques avancées 3*. Publications de l'Institut Français du Pétrole. Éd. Technip, 2004.
- [2] J. F. Claerbout and F. Muir. Robust modeling with erratic data. *Geophysics*, 38(5):826–844, Oct. 1973.
- [3] J. Morlet, G. Arens, E. Fourgeau, and D. Giard. Wave propagation and sampling theory—part I: Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, 47(2):203–221, 1982.
- [4] D. Gragnaniello, C. Chaux, J.-C. Pesquet, and L. Duval. A convex variational approach for multiple removal in seismic data. In *Proc. Eur. Sig. Image Proc. Conf.*, pages 215–219, Bucharest, Romania, Aug. 27-31, 2012.
- [5] M. Q. Pham, C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. Seismic multiple removal with a Primal-Dual proximal algorithm. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, Vancouver, Canada, May 2013.
- [6] S. Ventosa, S. Le Roy, I. Huard, A. Pica, H. Rabeson, P. Ricarte, and L. Duval. Adaptive multiple subtraction with wavelet-based complex unary Wiener filters. *Geophysics*, 77(6):V183–V192, Nov.-Dec. 2012.
- [7] M. Q. Pham, C. Chaux, L. Duval, and J.-C. Pesquet. Seismic multiple removal with a primal-dual proximal algorithm. In *Proc. Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process.*, pages 2257–2261, Vancouver, Canada, May 26-31 2013.
- [8] L. Jacques, L. Duval, C. Chaux, and G. Peyré. A panorama on multiscale geometric representations, intertwining spatial, directional and frequency selectivity. *Signal Process.*, 91(12):2699–2730, Dec. 2011.
- [9] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet. Primal-dual splitting algorithm for solving inclusions with mixtures of composite, Lipschitzian, and parallel-sum type monotone operators. *Set-Valued Var. Anal.*, 20(2):307–330, Jun. 2012.
- [10] J.-J. Moreau. Proximité et dualité dans un espace hilbertien. *Bull. Soc. Math. France*, 93:273–299, 1965.
- [11] E. van den Berg and M. P. Friedlander. Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(2):890–912, Nov. 2008.