

# Construction de bancs de filtres faiblement redondants

Jérôme GAUTHIER<sup>1,2</sup>, Laurent DUVAL<sup>2</sup> et Jean-Christophe PESQUET<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institut Gaspard Monge and UMR CNRS 8049,  
Université de Paris-Est Marne-La-Vallée, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

<sup>2</sup>Institut Français du Pétrole, IFP,  
1 et 4, avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex  
*jerome.gauthier@ifp.fr, laurent.duval@ifp.fr*  
*pesquet@univ-mlv.fr*

**Résumé** – L'inversion de bancs de filtres redondants étant un problème sous-déterminé, nous proposons d'utiliser une méthode d'optimisation, afin d'obtenir un banc de filtres de synthèse présentant de bonnes réponses fréquentielles. Le problème d'optimisation sous contrainte est reformulé, *via* une décomposition en valeurs singulières, comme un problème de minimisation non contraint dans un espace de dimension plus faible, ce qui entraîne un gain substantiel en temps de calcul. Les bancs de filtres faiblement redondants ainsi optimisés conduisent à de nettes améliorations dans les applications de filtrage spatial directionnel.

**Abstract** – Redundant filter bank inversion being an under-determined problem, we propose to use an optimization method to design a synthesis filter bank with good frequency responses. The constrained optimization problem is reformulated, using a Singular Value Decomposition, as an unconstrained minimization problem in a vector space of smaller dimension, thus significantly reducing computational complexity. These optimized low redundancy filter banks clearly lead to an improved performance in directional filtering applications.

## 1 Introduction

Les bancs de filtres à reconstruction parfaite sont devenus des outils très utiles en traitement du signal. Les transformées discrètes en ondelettes emploient ce formalisme et sont couramment employées en compression d'images, par exemple. Les transformées modulées ou orthogonales à recouvrement sont également utilisées en codage audio [1]. Il s'agit la plupart du temps de bancs de filtres à échantillonnage critique, aucune redondance n'étant introduite par la transformation. Or, dans d'autres applications, comme le débruitage ou la restauration de signaux, il est connu qu'une redondance accrue améliore sensiblement les performances des méthodes développées. Cette redondance peut être obtenue de diverses manières, le plus simplement par suppression des opérateurs de décimation, ou par des techniques de translation/moyennage (*cycle-spinning*), aboutissant à des transformations sur-échantillonnées. Deux problèmes en découlent. En premier lieu, la redondance introduite peut devenir difficilement gérable lorsque la dimension des données augmente. En second lieu, la redondance conduit *a priori* à une sous-détermination du système à inverser ; les degrés de liberté résultants permettent alors de ne plus employer uniquement le banc de filtre "inverse" naturel dans le cas critique, mais de nouveaux bancs de filtres de synthèse [2], plus performants, pour reconstruire le signal après traitement. L'objet de ce travail est de proposer de tels bancs de filtres de synthèse à réponses impulsionales optimisées et à faible redondance, pour traiter des données bidimensionnelles et volumiques de grande taille.

Nous allons dans un premier temps présenter la formula-

tion polyphase du problème. Nous verrons ensuite comment reformuler ce dernier de manière à permettre une écriture plus simple du problème d'optimisation du banc de filtres de synthèse. Enfin nous présenterons des résultats illustrant l'intérêt pratique de cette méthode.

## 2 Problème et notations

### 2.1 Formulation polyphase

Introduisons d'abord les notations utiles à la représentation polyphase de bancs de filtres tels que celui représenté figure 1 dans le cas uni-dimensionnel. Le signal  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est décomposé de  $M$  filtres de réponses impulsionales  $(h_i)_{0 \leq i < M}$ , de longueur finie  $kN$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Une étape de décimation d'un facteur  $N$  est alors appliquée sur les sorties des filtres. Du point de vue des transformées à recouvrement, ceci équivaut à un chevauchement de  $k - 1$  blocs de taille  $N$ . Enfin, les  $M$  sorties du banc de filtres d'analyse seront notées  $(y_i(n))_{0 \leq i < M}$ . La redondance globale de cette transformation est alors :  $M/N = k'$ . Dans ce travail, nous nous intéressons au cas sur-échantillonné, c'est-à-dire  $k' > 1$ .

Avec les notations introduites ci-dessus, les sorties du banc de filtres d'analyse s'écrivent, pour tout  $i \in \{0, \dots, M-1\}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} y_i(n) &= \sum_p h_i(p)x(Nn - p) \\ &= \sum_{\ell} \sum_{j=0}^{N-1} h_i(N\ell + j)x(N(n - \ell) - j). \end{aligned} \quad (1)$$

Soient  $\mathbf{H}(\ell) = (h_i(N\ell + j))_{0 \leq i < M, 0 \leq j < N}$ , pour tout  $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$  les  $k$  matrices obtenues à partir des réponses impulsionnelles des filtres. Introduisons aussi le vecteur polyphase [3] du signal d'entrée  $\mathbf{x}(n)$  :  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{x}(n) = (x(Nn - j))_{0 \leq j < N}$ . L'équation (1) peut alors être réécrite sous la forme d'un produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(n) &= (y_0(n), \dots, y_{M-1}(n))^\top \\ &= \sum_{\ell} \mathbf{H}(\ell) \mathbf{x}(n - \ell) = (\mathbf{H} * \mathbf{x})(n),\end{aligned}$$

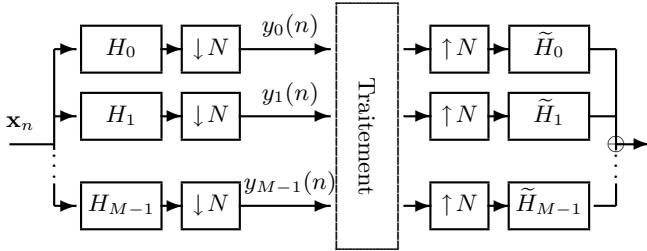


FIG. 1 – Banc de filtres uni-dimensionnel,  $M$  bandes, sur-échantillonné.

ou encore à l'aide d'une transformée en  $z$  :  $\mathbf{y}[z] = \mathbf{H}[z]\mathbf{x}[z]$ , où  $\mathbf{H}[z] = \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbf{H}(\ell)z^{-\ell}$  est la matrice polyphase de transfert de taille  $M \times N$  du banc de filtres d'analyse et  $\mathbf{x}[z]$  ainsi que  $\mathbf{y}[z]$  sont les transformées en  $z$  de  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , respectivement. De même, la matrice polyphase de transfert du banc de filtres de synthèse s'écrit :  $\widetilde{\mathbf{H}}[z] = \sum_{\ell} \widetilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell}$ , et vérifie :

$$\widetilde{\mathbf{x}}[z] = \widetilde{\mathbf{H}}[z]\mathbf{y}[z].$$

Le vecteur polyphase de  $(\widetilde{\mathbf{x}}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est défini de la même manière que pour  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et on peut aisément vérifier que

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\ell) = \left( \widetilde{h}_j(N\ell - i) \right)_{0 \leq i < N, 0 \leq j < M}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Les expressions précédentes sont valides pour tout banc de filtres sur-échantillonné unidimensionnel.

## 2.2 Expression d'un inverse

Le but de ce travail est de proposer un banc de filtre inverse optimisé permettant une reconstruction parfaite. Étudions, dans un premier temps, l'obtention d'un banc de filtre inverse particulier, qui servira de point de départ à l'optimisation.

Avec les notations précédentes nous cherchons donc une matrice :  $\widetilde{\mathbf{H}}[z]$  dans  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{N \times M}$  telle que :  $\widetilde{\mathbf{H}}[z]\mathbf{H}[z] = \mathbf{I}_N$ . Dans un article précédent [4], nous avons proposé un algorithme permettant de tester si un banc de filtres d'analyse à réponse impulsionnelle finie (RIF) peut être inversé par un banc de filtres de synthèse également RIF.

Supposons  $\mathbf{H}[z]$  inversible à gauche, alors il existe un entier  $p$  tel que :  $\widetilde{\mathbf{H}}[z] = \sum_{\ell=1-p}^0 \widetilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell}$ . On a alors :

$$\widetilde{\mathbf{H}}[z]\mathbf{H}[z] = \sum_{\ell=1-p}^0 \widetilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell} \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbf{H}(\ell)z^{-\ell} = \sum_{\ell=1-p}^{k-1} \mathbf{U}(\ell)z^{-\ell},$$

avec :  $\mathbf{U}(\ell) = \sum_{s=1+\max(\ell-k, -p)}^{\min(0, \ell)} \widetilde{\mathbf{H}}(s)\mathbf{H}(\ell-s)$ . La condition de reconstruction parfaite devient alors :  $\mathbf{U}(\ell) = \delta_{\ell} \mathbf{I}_N$ , ou encore exprimée sous la forme d'un système linéaire :

$$\mathcal{H}\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{U} \quad (2)$$

où :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{H}}^\top &= [\widetilde{\mathbf{H}}(1-p), \dots, \widetilde{\mathbf{H}}(0)], \\ \mathcal{U}^\top &= [\mathbf{0}_{N,(p-1)N} \ \mathbf{I}_N \ \mathbf{0}_{N,(k-1)N}],\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(k-1) & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(k-1) \end{pmatrix}.$$

Il ne reste alors qu'à fixer l'ordre  $p$  permettant de résoudre le système ci-dessus. On peut ainsi s'assurer de trouver une solution d'ordre minimum pour la matrice  $\widetilde{\mathbf{H}}[z]$ .

## 3 Optimisation

En regardant les résultats (figure 2(a) et (c)) de l'inversion de banc de filtres par la méthode de la partie 2.2, il est clair qu'un inverse obtenu de manière *brute* ne présente pas nécessairement de bonnes propriétés, notamment du point de vue de la sélectivité fréquentielle. Dans cette partie nous nous proposons de choisir parmi les inverses possibles un banc de filtres possédant de meilleures propriétés.

### 3.1 Réduction de la dimension du problème

Soit  $r$  le rang de  $\mathcal{H}$  et supposons que :  $r < Mp$ . À l'aide d'une décomposition en valeurs singulières de cette matrice, on obtient :

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}_0 \Sigma_0 \mathcal{V}_0^*,$$

où  $\Sigma_0 \in \mathbb{C}^{r \times r}$  est une matrice diagonale inversible,  $\mathcal{U}_0 \in \mathbb{C}^{N(k+p-1) \times r}$  et  $\mathcal{V}_0 \in \mathbb{C}^{Mp \times r}$  sont des matrices semi-unitaires. Ainsi, il existe des matrices  $\mathcal{V}_1 \in \mathbb{C}^{Mp \times (Mp-r)}$  et  $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{C}^{N(k+p-1) \times (N(k+p-1)-r)}$  telles que  $[\mathcal{U}_0 \ \mathcal{U}_1]$  et  $[\mathcal{V}_0 \ \mathcal{V}_1]$  soient des matrices unitaires.

Si une matrice polyphase inverse existe, alors une solution particulière de (2) est :  $\widetilde{\mathcal{H}}^0 = \mathcal{H}^\# \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{H}^\# = \mathcal{V}_0 \Sigma_0^{-1} \mathcal{U}_0^*$  est la pseudo-inverse de  $\mathcal{H}$ . L'équation (2) est alors équivalente à :

$$\mathcal{U}_0 \Sigma_0 \mathcal{V}_0^* (\widetilde{\mathcal{H}} - \widetilde{\mathcal{H}}^0) = \mathbf{0}_{(N+k-1) \times N}.$$

Comme  $\mathcal{U}_0^* \mathcal{U}_0 = \mathbf{I}_r$  et que  $\Sigma_0$  est inversible, on a :

$$\mathcal{V}_0^* (\widetilde{\mathcal{H}} - \widetilde{\mathcal{H}}^0) = \mathbf{0}_{r \times N},$$

ce qui revient à dire que les colonnes de  $\widetilde{\mathcal{H}} - \widetilde{\mathcal{H}}^0$  sont dans  $\text{Ker}(\mathcal{V}_0^*)$ , le noyau de  $\mathcal{V}_0^*$ . Sachant que  $\text{Ker}(\mathcal{V}_0^*)$  est égal à  $\text{Vect}(\mathcal{V}_1)$ , on peut alors écrire :

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{V}_1 \mathcal{C} + \widetilde{\mathcal{H}}^0 \quad (3)$$

où  $\mathcal{C}$  est une matrice quelconque de  $\mathbb{C}^{(Mp-r) \times N}$ . La construction de bancs de filtres de synthèse peut donc être simplifiée puisqu'elle se réduit au choix de la matrice  $\mathcal{C}$ .

### 3.2 Solution optimale

Nous allons utiliser les degrés de liberté que nous laissons la redondance, afin d'obtenir une sélectivité fréquentielle optimale pour les réponses impulsionales  $(\tilde{h}_j)_{0 \leq j < M}$  du banc de filtres de synthèse. À cette fin, nous nous proposons de minimiser la fonction  $J$  définie ci-dessous, où pour chaque  $0 \leq j < M$ ,  $f_j \in [-1/2, 1/2]$  est la fréquence autour de laquelle on veut concentrer la réponse fréquentielle du filtre  $\tilde{H}_j$  :

$$J(\tilde{H}) = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\int_{-1/2+f_j}^{1/2+f_j} (\nu - f_j)^2 |\tilde{h}_j[\nu]|^2 d\nu}{\int_{-1/2+f_j}^{1/2+f_j} |\tilde{h}_j[\nu]|^2 d\nu} \quad (4)$$

où  $\tilde{h}_j$  est la réponse fréquentielle définie par :

$$\forall \nu \in [-1/2, 1/2], \quad \tilde{h}_j[\nu] = \sum_{\ell=1-p}^0 \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{H}_{i,j}(\ell) e^{-2i\pi(N\ell-i)\nu}.$$

Soient, pour tous  $\ell \in \{1-p, \dots, 0\}$ ,  $j \in \{0, \dots, M-1\}$  et  $n \in \{0, \dots, Mp-r-1\}$ , les matrices :

$$\mathbf{V}_j(\ell, n) = \mathcal{V}_1((\ell+p-1)M+j, n)$$

avec  $\mathcal{V}_1 = [\mathcal{V}_1(q, n)]_{0 \leq q < Mp, 0 \leq n < Mp-r}$ . En utilisant l'équation (3), on obtient :

$$\tilde{H}_{i,j}(\ell) = \sum_{n=0}^{Mp-r-1} \mathbf{V}_j(\ell, n) \mathcal{C}(n, i) + \tilde{H}_{i,j}^0(\ell) \quad (5)$$

où  $\mathcal{C} = [\mathcal{C}(n, i)]_{0 \leq n < Mp-r, 0 \leq i < N}$ . Posons

$$K_j(i, \ell) = \int_{-1/2+f_j}^{1/2+f_j} (\nu - f_j)^2 e^{-2i\pi(N\ell-i)\nu} d\nu$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } i = \ell = 0 \\ \frac{(-1)^{N\ell-i} e^{-2i\pi(N\ell-i)f_j}}{2\pi^2(N\ell-i)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $(i, \ell) \in \{1-N, \dots, N-1\} \times \{1-p, \dots, p-1\}$ . On définit également la norme :

$$\|A\|_{K_j}^2 = \sum_{(i, i', \ell, \ell')} A_{i, \ell} \overline{A_{i', \ell'}} K_j(i - i', \ell - \ell')$$

où  $(i, i', \ell, \ell') \in \{0, \dots, N-1\}^2 \times \{1-p, \dots, 0\}^2$ . Avec ces notations et l'équation (5), on peut écrire :

$$\int_{-1/2+f_j}^{1/2+f_j} (\nu - f_j)^2 |\tilde{h}_j[\nu]|^2 d\nu = \|\mathbf{V}_j \mathcal{C} + \mathbf{H}_j^0\|_{K_j}^2.$$

Soit  $\Lambda = (\delta_i \delta_\ell)_{(i, \ell) \in \{1-N, \dots, N-1\} \times \{1-p, \dots, p-1\}}$ , grâce à l'égalité de Parseval, on a :

$$\int_{-1/2+f_j}^{1/2+f_j} |\tilde{h}_j[\nu]|^2 d\nu = \sum_{\ell=1-p}^0 \sum_{i=0}^{N-1} |\tilde{H}_{i,j}(\ell)|^2 = \|\mathbf{V}_j \mathcal{C} + \mathbf{H}_j^0\|_\Lambda^2,$$

où  $\|\cdot\|_\Lambda$  est la norme de Frobenius.

Finalement, en remplaçant dans l'équation (4), il vient :

$$J(\tilde{h}) = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\|\mathbf{V}_j \mathcal{C} + \mathbf{H}_j^0\|_{K_j}^2}{\|\mathbf{V}_j \mathcal{C} + \mathbf{H}_j^0\|_\Lambda^2} = \tilde{J}(\mathcal{C}).$$

Le problème d'optimisation de  $J$  sous contrainte de reconstruction parfaite peut donc être réexprimé comme le problème de minimisation sans contrainte de  $\tilde{J}$ .

## 4 Résultats

### 4.1 Optimisation de filtres

Pour tester la méthode de calcul du banc de filtres de synthèse proposée, nous avons choisi un banc de filtre d'analyse donné, pour tout  $1 \leq n \leq kN$  et  $0 \leq i \leq k'N-1$  par :

$$h_i(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{kN+1}\right)}{\sqrt{k'N}} e^{-i(i-\frac{k'N}{2}+\frac{1}{2})(n-\frac{kN}{2}-\frac{1}{2})\frac{2\pi}{k'N}}.$$

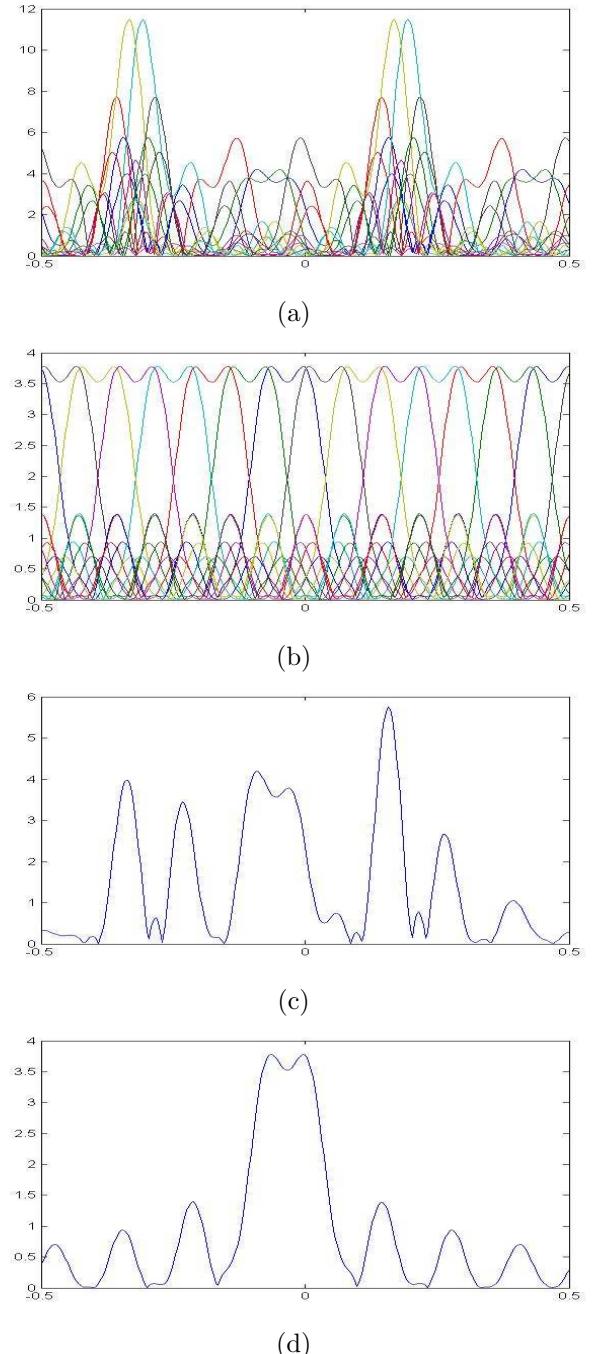


FIG. 2 – Réponses fréquentielles avant et après optimisation de tous les filtres (a)(b) et d'un filtre particulier (c)(d) (cas  $N = 8$ ,  $k = 3$  et  $k' = 7/4$ ).

On peut voir figure 2 des exemples de réponses fréquentielles de filtres de synthèse avant et après optimisation pour  $N = 8$ ,  $k = 3$  et  $k' = 7/4$ . Il est clair, en particulier sur les figures (d) et (c), que les nouvelles réponses fréquentielles sont beaucoup plus régulières et surtout sont plus concentrées autour des fréquences choisies.

Afin d'évaluer le gain de la réécriture du problème d'optimisation, nous avons réalisé des simulations pour différentes valeurs de  $N$  sous Matlab. Les fonctions utilisées ici sont `fminunc` pour l'optimisation contrainte et `fmincon` pour le cas non contraint. Ces tests ont été menés sur un ordinateur doté d'un processeur Intel Core 2 T7400 à 2,16GHz et de 2Go de RAM. Le tableau 1 montre que le gain en temps de calcul est conséquent. Ainsi, dans le cas où  $N = 16$ , l'exécution passe de plus de deux heures à moins de trois minutes. Ces résultats reflètent bien la réduction de dimension du problème : dans le cas  $N = 8$ , on trouve  $p = 3$  et donc l'optimisation sous contrainte se fait dans un espace de dimension 336 alors que la minimisation non contrainte se fait dans un espace de dimension 16.

Notons, cependant, que l'intérêt essentiel de la méthode proposée réside dans sa robustesse. En effet, dans certains cas, l'optimisation sous contrainte peut converger vers un minimum local parasite et ainsi conduire à une valeur de critère supérieure à celle obtenue par minimisation sans contrainte. Ce comportement a été observé, par exemple, pour  $N = 16$ ,  $k = 3$  et  $k' = 7/4$ .

	$N = 4$	$N = 8$	$N = 16$
Méthode contrainte	2,3s	325,0s	> 2h
Méthode non contrainte	0,1s	2,7s	168,5s

TAB. 1 – Temps de calculs des méthodes d'optimisation sous contrainte et de minimisation non contrainte avec le logiciel Matlab.

## 4.2 Application en filtrage directionnel

Pour illustrer l'amélioration apportée par les filtres optimisés, nous nous proposons de comparer les résultats de filtrage directionnel sur des images sismiques en utilisant pour la synthèse les filtres optimisés et ceux non optimisés.

La procédure de filtrage utilisée ici est très simple. Pour chaque transformation locale, elle consiste à :

- ① évaluer l'orientation dominante en recherchant les pics, en amplitude, de la transformée,
- ② éliminer les coefficients ne correspondant pas à la direction dominante,
- ③ éliminer les coefficients plus petits qu'un seuil (une fraction de la valeur des pics dominants).

Cette méthode de sélection de directions a été utilisée sur un extrait d'image sismique réelle (figure 3(a)). Dans le cadre de cette application nous avons délibérément choisi des paramètres de filtrage pouvant entraîner des problèmes pendant la reconstruction. Nous avons alors employé pour la reconstruction les bancs de filtres optimisés (figure 3(d)) ou non optimisés (figure 3(c)). On voit

qu'en utilisant un banc de filtres optimisé la qualité visuelle de l'image est bien meilleure, en particulier la majeure partie de l'effet de "damier" s'est estompée. Cette amélioration est d'autant plus visible sur l'image de différence entre les deux images filtrées (figure 3(b)).

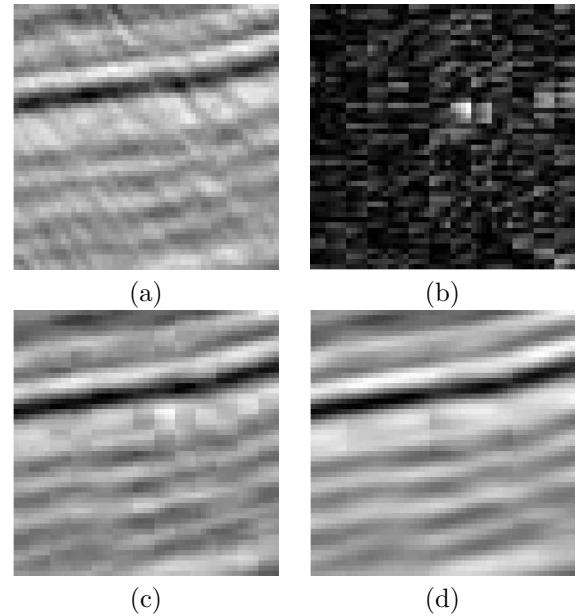


FIG. 3 – Image sismique originale (a), image de différence (b), image filtrée reconstruite avec des filtres non optimisés (c) et optimisés (d).

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode pour optimiser les réponses fréquentielles de bancs de filtres de synthèse dans le cas d'une transformée à recouvrement redondante. Nous avons pu réécrire le problème d'optimisation sous contrainte sous une forme simplifiée. Les résultats présentés montrent l'intérêt de la méthode en terme de temps de calcul, ainsi qu'en terme d'amélioration des traitements sur des données réelles.

## Références

- [1] H. Malvar, "A modulated complex lapped transform and its applications to audio processing," in *Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc.*, Mar. 1999, vol. 3, pp. 1421–1424.
- [2] S. Weiß, S. Redif, T. Cooper, C. Liu, P. D. Baxter, and J. G. McWhirter, "Paraunitary oversampled filter bank design for channel coding," *EURASIP J. Appl. Sign. Proc.*, vol. 2006, pp. 1–10, 2006.
- [3] P. P. Vaidyanathan, *Multirate systems and filter banks*, Prentice Hall, 1993.
- [4] J. Gauthier, L. Duval, and J. C. Pesquet, "Low redundancy oversampled lapped transforms and application to 3D seismic data filtering," in *Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc.*, May 2006, vol. 2, pp. 821–824.